Hohol, M., Bażela, N. (2024). Poznanie matematyczne. W J. Bremer (red.), *Kognitywistyka* (ss. 229–248). Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ignatianum w Krakowie. https://doi.org/ 10.35765/slowniki.436

Mateusz Hohol
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
https://orcid.org/0000-0003-0422-5488
Nina Bażela
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
https://orcid.org/0009-0003-1147-1086
https://doi.org/10.35765/slowniki.436

Poznanie matematyczne

Streszczenie

DEFINICJA POJĘCIA: Poznanie matematyczne to obszar nauki zajmującej się aktywnością umysłu związaną z matematyką, np. przetwarzaniem liczb i geometrii oraz biologicznymi podstawami kompetencji matematycznych człowieka. Poznanie matematyczne stanowi obszar badań interdyscyplinarnych, u których podstawy leżą psychologia i neuronauka.

ANALIZA HISTORYCZNA POJĘCIA: Badania nad poznaniem matematycznym poprzedza tradycja dociekań filozoficznych, dotyczących intuicji matematycznej. O ile według Platona, Kartezjusza, Kanta czy Poincarégo intuicja ta ma charakter wrodzony, o tyle według Helmholtza kształtowana jest ona na drodze doświadczenia. W prekursorskich badaniach nad rozwojem poznania matematycznego u dzieci Piaget wykorzystywał wciąż kategorię intuicji, przy czym wskazywał on, że wiedza o liczbach i przestrzeni budowana jest nie na drodze oglądu, lecz na podstawie aktywnego działania.

UJĘCIE PROBLEMOWE POJĘCIA: Poznanie matematyczne opiera się na systemach wiedzy rdzennej, które są stare ewolucyjnie, wykształcają się wcześnie w toku rozwoju osobniczego i są uniwersalne kulturowo. Umożliwiają one już we wczesnym wieku precyzyjną ocenę liczebności niewielkich zbiorów, szacowanie liczebności większych zbiorów, przetwarzanie kształtów oraz nawigację przestrzenną. Systemy te charakteryzują jednak ograniczenia, które przezwyciężane są przy wsparciu języka w toku uczenia się liczebników oraz słownictwa przestrzennego. Badania wskazują ponadto, że w przejściu pomiędzy wiedzą zawartą w systemach rdzennych a symboliczną matematyką istotną rolę odgrywają nawyki liczenia na palcach.

REFLEKSJA SYSTEMATYCZNA Z WNIOSKAMI I REKOMENDACJAMI: Badania nad poznaniem matematycznym dostarczają wiedzy o interakcjach natury i kultury, stanowiących jeden z podstawowych tematów nauk społecznych. Mają one również implikacje w obszarze edukacji, pomagając tworzyć wytyczne w zakresie wspierania osób z trudnościami szkolnymi.

Słowa kluczowe: geometria, liczby, asocjacje przestrzenno-numeryczne, wrodzoność, wiedza rdzenna

Definicja pojęcia

Z punktu widzenia kognitywistyki „poznanie matematyczne” rozumieć można na dwa sposoby – jako *explanans* i jako *explanandum* procesów poznawczych (Hohol, 2020). Pierwszy z nich odnosi się do wyjaśniania umysłu przy użyciu matematyki, w szczególności do modelowania różnorakich procesów poznawczych przy wykorzystaniu narzędzi matematycznych. W drugim z nich aktywność poznawcza powiązana z wykorzystywaniem matematyki traktowana jest jako zjawisko wyjaśniane przy pomocy metod i teorii zorientowanej empirycznie kognitywistyki. Jednocześnie w drugim ujęciu poznanie matematyczne związane jest z obszarem badań interdyscyplinarnych, których rdzeń stanowią psychologia eksperymentalna i neuronauka poznawcza, uzupełniane przez dyscypliny, takie jak modelowanie obliczeniowe, antropologia i etologia poznawcza, a także badania edukacyjne.

W niniejszym artykule skupiamy się przede wszystkim na „poznaniu matematycznym” rozumianym jako *explanandum*, korzystając roboczo z ujęcia zaproponowanego przez Rafaela Núñeza i George’a Lakoffa (2005, s. 110). Zgodnie z tym ujęciem przedmiotem badań nad poznaniem matematycznym jest

> pewien aspekt rzeczywistości psychologicznej, neurologicznej i edukacyjnej związanej z pewnymi zachowaniami, osiągnięciami i kompetencjami matematycznymi osoby, definiowanymi na poziomie jednostki lub na poziomie układu nerwowego jednostki, a matematyka jako taka pozostaje nietknięta.

Zakresem jest „to, co zazwyczaj rozumie się przez «matematykę», czyli elementarna arytmetyka, przetwarzanie liczb, a niekiedy podstawowa geometria lub elementarne myślenie algebraiczne”. Do przedmiotu badań należą również przestrzenne i ilościowe aspekty środowiska. Wreszcie badaczy poznania matematycznego interesują sposoby uzasadniania i praktyki dowodowe stosowane w matematyce, a także przetwarzanie obiektów i struktur matematycznych przyswajanych na poziomie akademickim. Zakres badań nad poznaniem matematycznym jest szeroki i obejmuje badania nad różnymi populacjami – począwszy od niemowląt, aż po profesjonalnych matematyków. Metody badawcze „to głównie standardowe metody empiryczne stosowane w psychologicznych badaniach behawioralnych, badaniach nad zespołami neuropsychologicznymi oraz obliczeniowym modelowaniu przetwarzania numerycznego" (Núñez & Lakoff, 2005, s. 110). Typowe pytania, z jakimi mierzą się badacze tak ujmowanego poznania matematycznego, są następujące: W jaki sposób umysł reprezentuje liczby? Czy istnieją wrodzone podstawy kompetencji numerycznych i geometrycznych człowieka, a jeśli tak, to jakie? Jakie struktury mózgowe zaangażowane są w elementarne przetwarzanie poznawcze liczb i własności geometrycznych? Czy poznawcze przetwarzanie struktur matematycznych przyswajanych na poziomie akademickim jest nadbudowane na elementarnym poznaniu numeryczno-geometrycznym?

Analiza historyczna pojęcia

Jednym z pierwszych i najważniejszych dzieł, które ukształtowały sposób myślenia o teoriach matematycznych, są bez wątpienia *Elementy* Euklidesa (IV–III w. p.n.e.), w których przedstawione zostały wzorce logicznego rozumowania i dedukcji matematycznej oraz podsumowana została wiedza matematyczna gromadzona na przestrzeni wieków przez matematyków greckich, którzy czerpali z kolei z dokonań Egipcjan i Babilończyków. Systematyzacja dokonana przez Euklidesa obejmowała geometrię na płaszczyźnie i stereometrię, a także algebrę geometryczną i teorię liczb, przy czym również ta ostatnia miała charakter geometryczny. Liczby ujmowane były jako odcinki, zaś mnożenie jako pomiar. Stąd też na przestrzeni wieków geometria pozostawała synonimem matematyki w ogóle, a dowody geometryczne uznawane były za wzór ścisłego myślenia. Jednym z terminów najczęściej pojawiających się w *Elementach* jest „konstrukcja", o czym przekonać można się już od Księgi I, której pierwsze twierdzenie dotyczy konstrukcji trójkąta równobocznego na danej skończonej prostej. Choć termin „konstrukcja" sugeruje, że przed przeprowadzeniem rozumowania obiekty matematyczne nie istnieją, to na kartach dzieła Euklidesa nie znajdziemy tego rodzaju deklaracji filozoficznych.

Platon (IV w. p.n.e.) przekonany był, że przyswajanie wiedzy matematycznej w toku wieloletniego treningu możliwe jest dzięki wrodzonej zdolności poznawczej, która umożliwia uchwytywanie elementarnej wiedzy o punktach, odcinkach, kątach i relacjach między figurami.

Zdolność ta tradycyjnie określana jest jako „intuicja matematyczna" i uznać można ją za historyczną poprzedniczkę „poznania matematycznego" (Hohol, 2020). Intuicja, określana również mianem „wglądu", powiązana jest z sięgającą co najmniej Platona metaforą „myślenia jako widzenia". Tezę o intuicyjności elementarnej matematyki Platon formułuje m.in. w swoim dialogu *Menon*, w którym niewykształcony niewolnik wiedziony pytaniami zadawanymi przez Sokratesa okazuje się zdolny do przeprowadzenia rozumowania dedukcyjnego. Prowadzi go ono do wniosku, że kwadrat zbudowany na przekątnej danego kwadratu jest dwa razy większy (zob. Hohol, 2020). Według Platona w toku przeprowadzania konstrukcji geometrycznej powstaje r e p r e z e n t a c j a obiektu matematycznego, „oglądana" przez umysł, ale istniejąca niezależnie od niego (zob. Hohol, 2020; Murawski, 2013). Podobnej tezy bronili kontynuatorzy myśli Platona, tacy jak Speuzyp z Aten (IV w. p.n.e.). Nie oznacza to jednak, że wszyscy filozofowie hellenistyczni byli platonikami. Jako kontrprzykład wymienić można choćby Arystotelesa, broniącego tezy o empirycznym charakterze wiedzy matematycznej, która powstaje w wyniku abstrakcji obiektów matematycznych z obiektów fizycznych, czy też Menaichmosa (IV w. p.n.e.) – związanego z Akademią Platońską matematyka, który twierdził, że konstrukcje geometryczne należy interpretować literalnie, tj. jako operacje, w wyniku których powstają obiekty matematyczne.

Intuicja matematyczna stała się jednym z klasycznych tematów filozofii nowożytnej. Kartezjusz (1596–1650) twierdził, że dotyczące wiecznych prawd twierdzenia matematyczne odkrywane są dzięki intuicji, którą nazywał „światłem naturalnym". Co istotne, intuicja umożliwiająca rozpoznawanie jasności i wyraźności twierdzeń matematycznych jest według niego wrodzona i całkowicie niezależna od świadectw zmysłów, a także może być przybliżona poprzez metaforę „myślenie to widzenie" (zob. Hohol, 2020; Murawski, 2013). Dyskusje nad intuicją kontynuowano także w kolejnych epokach, w szczególności w odniesieniu do koncepcji Immanuela Kanta (1724–1804). Według tego ostatniego wszystkie twierdzenia matematyczne mają status tak zwanych sądów syntetycznych *a priori*, a więc takich, które z jednej strony rozszerzają naszą wiedzę (w przeciwieństwie do tautologii), a z drugiej są całkowicie niezależne od empirycznego uzasadnienia, przy czym ich prawdziwość rozpoznawana jest intuicyjnie (zob. Hohol, 2020; Murawski, 2013).

Możliwe jest to dzięki powiązaniu konstrukcji matematycznych z przestrzenią i czasem. Przestrzeń i czas rozumiane są tu jako „dane naoczne", a zarazem jako wewnętrzne składniki umysłu, filtrujące wrażenia zmysłowe i organizujące poznanie. Wewnętrzna reprezentacja przestrzeni umożliwia podmiotowi konstrukcję geometrii, podczas gdy reprezentacja czasu leży u podstaw konstrukcji liczb, ujmowanych jako jednostki dołączane do siebie kolejno w czasie (zob. Hohol, 2020).

Do koncepcji intuicji matematycznej Kartezjusza i Kanta odwoływał się bezpośrednio Henri Poincaré (1854–1912), przy czym dokonał on daleko idących modyfikacji w jej rozumieniu (zob. Hohol, 2020). Poincaré określał intuicję matematyczną mianem „wrodzonej siły twórczej" ludzkiego umysłu, która umożliwia rozpoznawanie podstawowych relacji oraz twierdzeń matematycznych jako prawdziwych. Nowatorskim wkładem Poincarégo było natomiast zauważenie, że poznanie matematyczne angażuje zarówno świadome, jak i nieświadome przetwarzanie. Jego zdaniem twierdzenia matematyczne powstają początkowo na poziomie nieświadomym, ale muszą zostać uzupełnione przez świadomie kontrolowane rozumowanie. Wbrew Kantowi stwierdził on również, że aksjomaty, które służą jako punkt wyjścia dowodów geometrycznych, nie są sądami *a priori*, ale akceptowane są przez matematyków na mocy konwencji, w ustalaniu której niekiedy biorą oni pod uwagę fakty empiryczne, ale także kryteria takie jak wygoda i użyteczność. Doprowadziło to Poincarégo do uznania, że geometria definiowana przez zestaw aksjomatów zaprezentowanych przez Euklidesa nie jest jedyną możliwą, choć przyznawał on, że pozostaje ona najwygodniejsza. Wrodzona intuicja matematyczna gwarantuje więc zachowanie poprawności rozumowań, przy czym ostateczne wyniki zależne są od przyjętych na mocy konwencji założeń (zob. Hohol, 2020).

Jeszcze dalej w modyfikacji dotychczasowego rozumienia intuicji matematycznej poszedł Hermann von Helmholtz (1821–1894), zaprzeczając jej wrodzoności i skłaniając się ku radykalnemu empiryzmowi. Choć zgadzał się on z Kantem w tym, że doświadczenia i wrażenia zmysłowe są filtrowane przez umysł, odrzucił całkowicie transcendentalny punkt widzenia. Według Helmholtza zdolność poznawcza tradycyjnie określana jako intuicja matematyczna kształtowana jest na drodze akumulacji doświadczeń i wzmacniania powiązanych z nimi śladów pamięciowych. Oznacza to, że kształtowanie intuicji matematycznej można, a nawet należy, „rozbić” na prostsze komponenty, a następnie wskazać, jak myślenie matematyczne kształtuje się w trakcie rozwoju osobniczego. Tezy Helmholtza na temat empirycznego pochodzenia intuicji matematycznej miały wciąż charakter filozoficzny, jednak inspirowane były jego badaniami psychologicznymi (należy wspomnieć, że był on jednym z pionierów psychologii eksperymentalnej) i położyły podwaliny pod badania empiryczne nad uczeniem się matematyki (zob. Hohol, 2020).

Termin „intuicja matematyczna” nie odszedł w zapomnienie wraz z powstaniem psychologii eksperymentalnej, choć jego znaczenie uległo kolejnej znaczącej zmianie. Istotną rolę w kształtowaniu się współczesnych badań empirycznych nad poznaniem matematycznym odegrał Jean Piaget (1896–1980). Uczony ten twierdził, że rozwój poznawczy przebiega wedle uporządkowanych faz, począwszy od fazy sensoryczno-motorycznej (od urodzenia do drugiego roku życia), w której dzieci zaczynają kształtować rozumienie stałości przedmiotów. Kolejna faza (trwająca do około szóstego roku życia) określana jest jako przedoperacyjna i charakteryzuje się brakiem możliwości przyjmowania perspektyw innych niż własna. Następnie (aż do dwunastego roku życia) dzieci przechodzą przez fazę operacji konkretnych, podczas której opanowują podstawy logiki i przyjmowania alternatywnych perspektyw, co umożliwia im rozumienie związków przyczynowo-skutkowych. Wreszcie w wieku dwunastu lat dzieci wkraczają w fazę operacji formalnych, która charakteryzuje się umiejętnością myślenia abstrakcyjnego.

Piaget poświęcił osobne prace genezie kompetencji numerycznych i geometrycznych, przy czym co do wszystkich pojęć matematycznych przyjmował on stanowisko konstruktywistyczne oraz zorientowane na działanie (zob. Semadeni, 2023). Jego zdaniem pojęcia matematyczne nie są wrodzone ani nie powstają nagle, ale są stopniowo konstruowane w umyśle dziecka na bazie doświadczeń. Nie kształtują się one w wyniku samego postrzegania świata fizycznego, ale eksploracji środowiska i aktywnej manipulacji przedmiotami. Jeśli chodzi o kompetencje arytmetyczne, Piaget wskazywał, że rozwijają się one równolegle ze zdolnościami logicznymi. Samo pojęcie liczby powstaje natomiast w wyniku abstrakcji (czyli pomijania cech fizycznych przedmiotów, takich jak kolor, wielkość czy kształt), bazującej na działaniach dokonywanych na przedmiotach, takich jak np. przyporządkowywanie obiektów do zbiorów (zob. Szczygieł, 2017). Dla rozwoju pojęcia liczby kluczowe jest zinternalizowanie zasady stałości, a w szczególności zrozumienie, że zmiana położenia przedmiotów w zbiorach nie powoduje zmiany ich liczby. W typowych przeprowadzanych przez Piageta badaniach dziecku przedstawiano dwa równoliczne rzędy przedmiotów (np. kulek), znajdujących się w tej samej odległości, a następnie rozsuwano przedmioty w jednym z rzędów, co oznaczało zmianę układu przestrzennego, ale nie liczebności. Piaget zaobserwował, że nawet pięcioletnie dzieci twierdzą błędnie, że rozsunięcie prowadzi do zwiększenia liczby przedmiotów. Błąd ten ustępuje dopiero w szóstym lub siódmym roku życia, co oznacza pełne ukształtowanie pojęcia liczby. Późniejsze badania wykazały, że z zadaniami sprawdzającymi rozumienie zasady stałości obiektów radzą sobie również młodsze dzieci. Rozbieżność tę wyjaśniono m.in. nienaturalnością warunków badań przeprowadzanych przez Piageta (zob. Szczygieł, 2017). Co więcej, wykorzystanie innych paradygmatów badawczych umożliwiło badania nad obecnością reprezentacji liczb nawet u noworodków (zob. sekcję *Ujęcie problemowe pojęcia*).

Piaget przekonany był, że również pojęcia geometryczne nie wywodzą się po prostu z obserwacji świata. Przykładowo „równość" wywodzi się z internalizacji działania polegającego na wyrównywaniu dwóch przedmiotów, „prosta" ma u swych podstaw internalizację działania podążania za czymś, np. wzrokiem, bez zmiany kierunku, zaś „kąt" bierze się z internalizacji dwóch przecinających się ruchów np. rąk (zob. Hohol, 2020; Semadeni, 2023). Jeśli chodzi o poznawczą genezę geometrii, Piaget – jak już wspomniano – nie stronił od klasycznego pojęcia intuicji. Jak pisał on wspólnie z Bärbel Inhelder:

> Intuicja przestrzeni nie jest czytaniem lub dostrzeganiem własności obiektów, ale od samego początku przeprowadzanym na nich działaniem. Ponieważ działanie wzbogaca i rozwija rzeczywistość fizyczną, zamiast jedynie ekstrahować z niej zbiór gotowych struktur, może ono ostatecznie wykroczyć poza ograniczenia fizyczne i stworzyć schematy operacyjne. Schematy te mogą zostać sformalizowane, tak by funkcjonowały w czysto abstrakcyjny i dedukcyjny sposób. Począwszy od podstawowej aktywności sensoryczno-motorycznej, aż po abstrakcyjne operacje, rozwój intuicji geometrycznej jest aktywnością w najpełniejszym znaczeniu tego słowa (Piaget & Inhelder, 1967, s. 449).

Koncepcja Piageta, choć w dużej mierze podważona przez późniejsze badania (zob. Spelke, 2022; Szczygieł, 2017), była oryginalna i historycznie ważna, stanowiła bowiem pierwszą próbę zdefiniowania etapów dojścia przez dziecko do pojęcia przestrzeni euklidesowej (zob. Hohol, 2020). Zdaniem Piageta rozwój indywidualny dokonuje się w porządku odwrotnym względem historycznego kształtowania się geometrii jako dziedziny matematyki. O ile geometria euklidesowa powstała już w starożytności, geometria rzutowa została opracowana w XIX w., zaś topologia powstawała na przełomie XIX i XX w., Piaget twierdził, że najbardziej pierwotnym pojęciem przestrzeni, kształtującym się w umyśle dziecka około trzeciego roku życia, jest „przestrzeń topologiczna" – trzeba jednak stwierdzić, że to, co Piaget rozumiał przez topologię, dalekie jest od ścisłego ujęcia matematycznego (zob. Hohol, 2020; Semadeni, 2023). Swoje wnioski sformułował m.in. na bazie eksperymentów, w których zadaniem dzieci było rozróżnianie kształtów np. na bazie dotyku i w których radziły sobie one dobrze, gdy jeden z przedmiotów był domknięty, a drugi nie. Najmłodsze dzieci nie radziły sobie natomiast z rozróżnianiem kwadratu od trójkąta ani nawet figur prostoliniowych od krzywoliniowych. Na tej podstawie Piaget stwierdził, że trzyletnie dzieci nie dysponują jeszcze pojęciami długości czy kąta. O ile w wieku około sześciu–siedmiu lat pewne pojęcia euklidesowe zdają się być już ukształtowane, wszystkie relacje geometryczne wciąż rozpatrywane są przez dziecko względem własnego punktu widzenia (co odpowiada wciąż egocentrycznej fazie przedoperacyjnej ogólnego rozwoju poznawczego). Na tej podstawie Piaget twierdził, że dziecko w tym wieku dysponuje pojęciem przestrzeni rzutowej. Wreszcie około dwunastego roku życia (co pokrywa się z wejściem w fazę operacji formalnych) dzieci rozwijają pojęcie przestrzeni euklidesowej, które nie odnosi się do konkretnego układu przedmiotów zajmujących postrzegane pozycje, ale raczej do organizacji samej przestrzeni jako „niewidzialnego pojemnika", wewnątrz którego relacje są niezależne od aktualnego punktu widzenia (Piaget & Inhelder, 1967). Podobnie jak w przypadku rozwoju pojęcia liczby, teza o pierwszeństwie topologii jest współcześnie kwestionowana. Przykładowo wskazuje się na obserwację Piageta, że dzieci w pierwszej kolejności odróżniają figury otwarte od zamkniętych, jako wynikającą raczej z lepszej znajomości niektórych przedmiotów, a nie z najbardziej podstawowego charakteru topologii (zob. Hohol, 2020). Tym, co zdaje się natomiast aktualne, jest teza Piageta, zgodnie z którą kompetencje matematyczne nie wywodzą się z samej rejestracji świata za pomocą wzroku, ale z ruchu i działania w świecie.

Ujęcie problemowe pojęcia

Interdyscyplinarna nauka o poznaniu, znana dziś jako kognitywistyka, powstała na przełomie lat 50. i 60. XX w., obejmując początkowo przede wszystkim psychologię poznawczą, lingwistykę i informatykę, do których dołączały stopniowo neuronauka, antropologia i filozofia. Rozumowania matematyczne i logiczne stanowiły jedno z podstawowych zainteresowań wielu pionierów kognitywistyki, takich jak Allen Newell i Herbert Simon. Świadczą o tym współtworzone przez nich programy, określane jako pierwsze programy sztucznej inteligencji: Teoretyk Logiczny (*Logic Theorist*) i Uogólniony Rozwiązywacz Problemów (*General Problem Solver*), które zdolne były m.in. do radzenia sobie z dowodzeniem twierdzeń ze słynnego traktatu matematycznego *Principia mathematica* Bertranda Russella i Alfreda North Whiteheda. Inne programy pochodzące z tego okresu dowodziły natomiast z powodzeniem twierdzeń geometrii euklidesowej. Ponieważ krytycy wskazywali, że programy komputerowe mogą osiągać analogiczne wyniki matematyczne w zupełnie inny sposób niż ludzie, aby wyeliminować ten problem projektanci i programiści, zaczęli stopniowo wykorzystywać dane psychologiczne (pierwotnie protokoły werbalne, później dane dotyczące czasów reakcji). Stąd też programy geometryczne symulować zaczęły interakcje, w jakie ludzie wchodzą z reprezentacjami zewnętrznymi, np. diagramami (zob. Hohol, 2020).

Dowodzenie twierdzeń, będące zaawansowaną czynnością angażującą wiele procesów poznawczych, nie stało się jednak głównym tematem badań nad poznaniem matematycznym. Zamiast tego koncentrowano się na zagadnieniach bardziej elementarnych, takich jak sposób reprezentowania liczb przez umysł, który – jak się okazało – ma wiele wspólnego z analogowym przetwarzaniem wielkości fizycznych w ogóle. Wyniki licznych badań wskazują, że porównując dwa postrzegane przedmioty fizyczne, zarówno ludzie, jak i zwierzęta radzą sobie lepiej (osiągają większą poprawność i krótsze czasy reakcji), gdy przedmioty znacząco różnią się pod względem wielkości, niż gdy różnica w ich wielkości jest nieduża. Gdy zaś badani porównują pary przedmiotów o stałej różnicy wielkości, łatwiej przychodzi im porównywanie par małych przedmiotów niż par większych obiektów (zob. Butterworth, 2022). Pierwsze z tych zjawisk określa się mianem efektu dystansu, zaś drugie – efektu rozmiaru. Co istotne, efekty te zachodzą, gdy przetwarzane są różne wielkości fizyczne, także takie jak długość odcinka czy jasność obiektu.

W 1967 r. Moyer i Landauer opisali podobny efekt dystansu dla liczb (zob. Brożek & Hohol, 2017; Dehaene, 2011). W zadaniu polegającym na wskazywaniu, która z dwóch liczb (przedstawianych za pomocą symboli arabskich) jest większa, ludzie reagują szybciej i popełniają mniej błędów, gdy porównywane liczby dzieli większy dystans (np. 5 i 9), niż gdy dystans ten jest mniejszy (np. 4 i 5). Odkryto również efekt rozmiaru dla liczb: gdy odległości między porównywanymi liczbami są takie same (np. różnica pomiędzy 3 i 5 oraz 5 i 7 wynosi 2), osoby badane udzielają odpowiedzi szybciej i popełniają mniej błędów w przypadku mniejszych liczb. Na bazie odkrycia tych dwóch efektów zaproponowano koncepcję umysłowej osi liczbowej (ang. *mental number line*). Efekt dystansu wskazuje na to, że na poziomie automatycznego i nieświadomego przetwarzania poznawczego reprezentacje liczb są ustrukturyzowane przestrzennie; porównanie dwóch liczb wymaga poznawczego „przybliżenia" określonego fragmentu osi, co łatwiejsze jest w przypadku liczb, które są od siebie bardziej oddalone. Z kolei efekt rozmiaru wskazuje na to, że inaczej niż w przypadku osi liczbowej znanej ze szkoły, umysłowa oś liczbowa jest skompresowana logarytmicznie, tak że wraz ze wzrostem wielkości liczbowych maleją odległości między nimi; porównywanie mniejszych liczb jest zatem łatwiejsze ze względu na ich większą rozdzielczość (zob. Cipora & Nęcka, 2012). Niektóre badania sugerują, że w trakcie rozwoju osobniczego, a konkretnie wraz z nabywaniem szkolnych kompetencji matematycznych, stopień logarytmicznej kompresji osi liczbowej ulega zmniejszeniu, co wiąże się z redukcją siły efektów dystansu i rozmiaru. Z drugiej strony większość badaczy zgadza się dziś co do tego, że poznawcza reprezentacja wielkości, w tym wielkości liczbowej, może być aktywowana niezależnie od przestrzeni, co sprawia, że efekty dystansu i rozmiaru nie mogą być w łatwy sposób interpretowane na korzyść istnienia umysłowej osi liczbowej.

Teoretyczny konstrukt umysłowej osi liczbowej zyskał jednak poważne wsparcie w zaobserwowanym po raz pierwszy przez Stanislasa Dehaene'a i współpracowników w 1993 r. i zreplikowanym odtąd kilkaset razy efekcie SNARC (Dehaene, 2011; zob. także Cipora & Nęcka, 2012; Brożek & Hohol, 2017). Efekt SNARC (*Spatial-Numerical Association of Response Codes*), czyli zależność przestrzenna między liczbą a rodzajem odpowiedzi, polega na tym, że w eksperymentach, w których zadanie osób badanych polega na podejmowaniu decyzji dotyczących właściwości prezentowanych kolejno liczb (np. wskazywaniu, czy liczba jest parzysta czy nieparzysta), obserwuje się krótsze czasy reakcji lewą ręką dla względnie małych liczb i prawą ręką dla względnie dużych liczb. Względnie, ponieważ efekt ten daje się zaobserwować nawet, gdy zbiór bodźców testowych obejmuje liczby od 1 do 9 (przy czym ze względów metodologicznych pomija się liczbę 5). Wzorzec ten sugeruje, że analogicznie do szkolnej osi liczbowej umysłowa reprezentacja liczb ustrukturyzowana jest kierunkowo – mniejsze liczby znajdują się bardziej po lewej, zaś większe po prawej stronie. Obecnie toczy się wciąż debata nad czynnikami wpływającymi na siłę efektu SNARC, a nawet sam kierunek (zob. Butterworth, 2022). Z jednej strony podkreśla się rolę czynników kulturowych w ukierunkowaniu umysłowej osi liczbowej. Standardowy efekt SNARC obserwuje się w kulturach, w których pisanie i czytanie przebiega od lewej do prawej, zaś odwrócony efekt SNARC w kulturach, gdzie pisze i czyta się od prawej do lewej. Co więcej, osoby, które mając policzyć na palcach od 1 do 10, zaczynają od lewej ręki, przejawiają silniejszy efekt niż te, które zaczynają od prawej. Z drugiej strony na podstawie wyników badań przeprowadzanych na zwierzętach wskazuje się, że samo wiązanie liczebności z przestrzenią ma głębokie korzenie ewolucyjne.

Efekty dystansu i rozmiaru wskazują na to, że liczby są reprezentowane poznawczo w sposób analogowy, czyli tak jak wielkości fizyczne. Z kolei efekt SNARC interpretuje się standardowo jako argument na rzecz powiązania umysłowych reprezentacji liczb i przestrzeni. Wnioski te wspierane są nie tylko przez wyniki licznych badań behawioralnych, ale również neuronaukowych, przeprowadzonych z wykorzystaniem funkcjonalnego obrazowania rezonansem magnetycznym. Przykładowo wskazuje się, że obszar bruzdy śródciemieniowej mózgu wykazuje podobne reakcje, gdy osoby badane przetwarzają zarówno liczby symboliczne, jak i odcinki. Na bazie tych oraz innych wyników Vincent Walsh sformułował teorię wielkości znaną jako ATOM (*A Theory of Magnitude*). Zakłada ona, że w korze płata ciemieniowego istnieje wspólna część mechanizmu metrycznego, zaangażowanego w przetwarzanie czasu, przestrzeni i liczb (zob. Butterworth, 2022). Warto pamiętać, że nie oznacza to, że wszystkie te wielkości przetwarzane są dokładnie tak samo czy że ich mechanizmy nie angażują dodatkowych komponentów. Co ciekawe, dowody świadczące o roli płata ciemieniowego w przetwarzaniu liczb oraz przestrzeni pojawiły się na długo przed tym, jak zaczęto stosować techniki neuroobrazowania. Jeszcze w pierwszej połowie XX w. austriacki neurolog Josef Gerstmann opisał zespół objawów (znany dziś jako zespół Gerstmanna) towarzyszących uszkodzeniu zakrętu kątowego, na które składają się trudności w przetwarzaniu liczb, odróżnianiu stron i pisaniu oraz agnozja palców (polegająca np. na zaburzeniach w rozpoznawaniu, który z palców pacjenta jest aktualnie stymulowany).

Współczesne wysiłki badawcze zmierzają do zrozumienia mechanizmu przetwarzania liczebności nie tylko na poziomie całych struktur mózgowych, ale także z uwzględnieniem poziomu pojedynczych neuronów. Badając makaki, Andres Nieder (2019) odnalazł tzw. numerony (ang. *numerical neurons*), znajdujące się w okolicy bruzdy śródciemieniowej, czyli w obszarze wyspecjalizowanym w przetwarzaniu wielkości, oraz w bocznej korze przedczołowej, czyli strukturze zaangażowanej w ogólne procesy poznawcze. Ich nazwa bierze się stąd, że komórki te reagują selektywnie na małe liczebności niesymboliczne – dany neuron reaguje najsilniej, gdy makak postrzega jedną kropkę, inny neuron, gdy zwierzę postrzega dwie kropki i tak dalej, aż do czterech. Cztery (plus minus jeden element) stanowi barierę tzw. subitacji (ang. *subitizing*), czyli bezwysiłkowej, szybkiej i precyzyjnej oceny liczby elementów. Subitację należy odróżnić od szacowania, które polega na przybliżonym określeniu ilości elementów w zbiorze o liczebności większej niż cztery (plus minus jeden) oraz od liczenia. O ile subitacja i szacowanie są niezależne od reprezentacji symbolicznych, takich jak cyfry arabskie czy liczebniki, o tyle nauczywszy się liczenia, jesteśmy w stanie określić precyzyjnie liczebności zbiorów, które przekraczają – i to nawet znacznie – zakres subitacji. Choć przeprowadzono wiele badań wskazujących na to, że przedstawicieli niektórych gatunków zwierząt można nauczyć liczenia, panuje konsensus, że zdolność ta jest częścią ekologii poznawczej człowieka (zob. Butterworth, 2022).

W kontekście dyskusji omówionych w sekcji *Analiza historyczna pojęcia* nasuwają się dwa pytania: czy w świetle obecnej wiedzy kognitywistycznej elementarne zdolności numeryczne, czyli subitację i szacowanie, można uznać za podstawę, na której w trakcie ontogenezy nadbudowywane są liczenie, arytmetyka i inne zdolności matematyczne? I czy te elementarne zdolności są wrodzone? Innymi słowy: czy rację mieli filozofowie szukający wrodzonych podstaw intuicji matematycznej, czy raczej Hermann von Helmholtz, który podważał istnienie czegokolwiek wrodzonego, prócz samych mechanizmów uczenia się? Choć wokół tych kwestii wciąż toczą się dyskusje (zob. Butterworth, 2022; Haman & Gut, 2016; Nieder, 2019), wielu badaczy poznania matematycznego skłonnych jest opowiedzieć się za wrodzonością elementarnego poznania numerycznego oraz tym, że stanowi ono podstawę dla uczenia się matematyki.

Jeśli chodzi o wrodzoność elementarnych kompetencji numerycznych, ludzkie niemowlęta przejawiają zdolność do odróżniania zbiorów różniących się liczbą przedmiotów, nie potrzebując do tego żadnego treningu. Wykazały to badania wykorzystujące tzw. paradygmat habituacji. W przypadku gdy dzieci w wieku około sześciu miesięcy obserwowały serię obrazków z jednakową liczbą czarnych punktów, które różniły się wielkością lub rozmieszczeniem, następowało skrócenie okresu ich zainteresowania danym bodźcem, co wskazuje na pojawienie się zjawiska habituacji. Natomiast gdy zaprezentowano im obrazy z odmienną liczbą punktów, bez względu na ich układ przestrzenny, odzyskiwały zainteresowanie obrazem, co objawiało się wydłużonym czasem obserwacji bodźca (zob. Brożek & Hohol, 2017). Inne badania wykazały natomiast, że już niemowlęta dysponują intuicją równoliczności. Przykładowo słysząc ciąg czterech sylab, noworodki spoglądały dłużej na zbiór czterech kropek niż na zbiór złożony z dwunastu kropek. Co więcej, badania przeprowadzone na licznych gatunkach zwierząt – począwszy od naczelnych różnych od człowieka, przez gryzonie, ptaki, a nawet ryby – wskazują, że zdolność do postrzegania liczebności jest powszechna w przyrodzie, co najmniej wśród kręgowców (zob. Butterworth, 2022; Nieder, 2019).

Zgodnie z wpływową i wciąż rozwijaną teorią systemów rdzennych autorstwa Elizabeth Spelke (2022), nasze zdolności poznawcze opierają się na tzw. systemach wiedzy rdzennej (ang. *core knowledge systems*). Systemy te, jak pisze Spelke (2022),

> przetwarzają ograniczoną dziedzinę obiektów i uchwytują jedynie podzbiór własności, których dostarczają nasze zmysły. Systemy te są zamknięte, aktywowane automatycznie i nieświadome (…). Systemy wiedzy rdzennej pojawiają się na wczesnych etapach ontogenezy i funkcjonują przez resztę życia. Są one obecne u ludzi w każdym wieku i w każdej kulturze. Kierują one naszym myśleniem i uczeniem się zarówno w okresie niemowlęcym, jak i później. Co więcej, te same możliwości i ograniczenia systemów znaleźć można u szerokiej gamy zwierząt i zależą one od homologicznych systemów i procesów mózgowych, co dostarcza dowodów na to, że systemy rdzenne pojawiły się głęboko w naszej ewolucyjnej przeszłości (s. 190; zob. także Haman & Gut, 2016).

Wedle teoretyków systemów rdzennych za subitację i szacowanie odpowiadają dwa zlokalizowane w płacie ciemieniowym rozłączne systemy, określane kolejno jako system śledzenia obiektów oraz system przybliżania liczebności. Razem służą nam one za „zmysł liczebności" (ang. *the number sense*), który stanowi warunek konieczny dla opanowania liczb wyrażanych symbolicznie i wykonywania na nich działań (zob. Dehaene, 2011).

Jak wskazano powyżej, istnieją argumenty pozwalające twierdzić, że reprezentacje liczb mają charakter przestrzenny. Skąd biorą się jednak nasze intuicje przestrzenne i czy są one – jak twierdził Kant – podstawą geometrii euklidesowej? Według Spelke (2022) podobnie jak w przypadku „zmysłu liczebności", nasze zdolności geometryczne ugruntowane są w dwóch ewolucyjnie starych, wczesnych ontogenetycznie i uniwersalnych kulturowo systemach wiedzy rdzennej, które określa się jako system geometrii przestrzennej i system geometrii obiektowej (Hohol, 2020). Pierwszy z nich zlokalizowany jest w formacji hipokampa i przetwarza odległości i kierunki, umożliwiając nawigację w środowisku. Drugi zlokalizowany jest natomiast w bocznych strukturach płata potylicznego i przetwarza kąty oraz długości, co umożliwia rozpoznawanie dwuwymiarowych kształtów i trójwymiarowych obiektów. Jak zauważa Spelke (2022), wszystkie systemy rdzenne cechują się ograniczeniami. System śledzenia obiektów dostarcza dokładnej wiedzy o liczebności, ale w zakresie zaledwie do około czterech przedmiotów. Z kolei system liczb przybliżonych pozwala operować na większych liczebnościach, lecz kosztem precyzji. System geometrii przestrzennej jest czuły na odległość i kierunek, ale nie na kąty. Wreszcie system geometrii obiektowej przetwarza długości i kąty, ale nie kierunki. Jak jest to zatem możliwe, że reprezentacje poznawcze generowane przez tak ograniczone systemy łączone są w wolny od ograniczeń system pojęć matematycznych?

Choć wiele szczegółów pozostaje wciąż nieznanych, według Spelke (2022) łączenie dokładnych reprezentacji małych liczb z przybliżonymi reprezentacjami większych liczb możliwe jest dzięki opanowaniu liczebników. Już w bardzo młodym wieku dzieci zaczynają posługiwać się podstawowymi liczebnikami, jednak do ukończenia drugiego roku życia nie są w stanie nadawać im właściwych znaczeń. Znacząca zmiana zachodzi w trzecim roku życia, kiedy dzieci zaczynają pojmować, że liczebnik „jeden" reprezentuje abstrakcyjną wartość 1. Proces ten jest kontynuowany dla następnych liczb i odpowiadających im liczebników do liczby 4 w czwartym roku życia. Od tego momentu zdolność do korzystania z liczebników rozwija się bardzo dynamicznie, co idzie w parze z nauką rozwiązywania bardziej skomplikowanych zadań arytmetycznych. Dzieci formułują uniwersalną zasadę pozwalającą na przyporządkowanie każdej liczbie odpowiadającego jej liczebnika, co sprzyja zrozumieniu zarówno aspektu kardynalnego, jak i porządkowego liczby. Język funkcjonuje więc jako rusztowanie, umożliwiające przełamanie ograniczeń rdzennych systemów numerycznych. Badania wskazują ponadto, że w przejściu pomiędzy wiedzą zawartą w systemach rdzennych a symboliczną matematyką istotną rolę odgrywają nawyki liczenia na palcach. Palce są obiektem konkretnym i łatwym do manipulowania, a zarazem nadają się do reprezentowania liczebności różnych przedmiotów. Co więcej, ze względu na naturalne ustrukturyzowanie, nawyki liczenia na palcach sprzyjają opanowaniu porządkowego aspektu liczby, podczas gdy systemy wiedzy rdzennej kodują jedynie aspekt kardynalny (zob. Szczygieł et al., 2015).

Badania wskazują, że w dziedzinie geometrii podobną do liczebników rolę odgrywa uczenie się słownictwa przestrzennego (zob. Hohol, 2020). Proces ten wspierany jest również przez rosnące doświadczenie dzieci w zakresie posługiwania się szkicami przypominającymi mapy, za sprawą których dzieci uczą się przedstawiać układy przestrzenne, reprezentowane pierwotnie przez system geometrii obiektowej (kierunek, odległość), jako dwuwymiarowe struktury, których kluczowymi właściwościami geometrycznymi są kąty i długości.

Refleksja systematyczna z wnioskami i rekomendacjami

Współczesne badania nad poznaniem matematycznym postrzegać można jako kontynuację dociekań filozoficznych nad naturą intuicji matematycznej. Świadczy o tym choćby to, że Stanislas Dehaene i Elizabeth Brannon (2010) nie wahają się nazywać jednego z głównych nurtów badań „Kantowskim programem badawczym". W programie tym podkreśla się ciągłość między biopsychologicznymi podstawami poznania matematycznego a tym, w jaki sposób nasze umysły przetwarzają czas i przestrzeń, przy czym Kantowskie „filtry" zastępowane są rdzennymi systemami poznawczymi o długim rodowodzie ewolucyjnym. Dehaene i Brannon nie wahają się nawet stwierdzić, że gdyby Kant żył współcześnie, zostałby on nie filozofem, lecz neurokognitywistą (s. 519). W porównaniu z wcześniejszymi dociekaniami filozoficznymi współczesne badania nad poznaniem matematycznym umożliwiają wyjście poza sferę racjonalnych spekulacji i budowanie teorii możliwych do testowania w eksperymentach wykorzystujących metody, które sprawdziły się dobrze także w odniesieniu do innych sfer działania umysłu. Z drugiej jednak strony pochopne byłoby stwierdzenie, że empiryczne badania nad poznaniem matematycznym w prosty sposób zastępują filozofię matematyki. O ile trudno wyobrazić sobie dziś budowanie wiarygodnych teorii filozoficznych na temat wiedzy matematycznej, które byłyby jawnie sprzeczne z aktualnym rozumieniem mechanizmów neuropoznawczych, równie trudno wyobrazić sobie, by neurokognitywiści rozwiązali problem statusu ontologicznego obiektów i struktur matematycznych. Innymi słowy współczesne badania nad poznaniem matematycznym nie mogą rozstrzygnąć wspomnianego wcześniej sporu pomiędzy Speuzypem i Menaichmosem.

Innym istotnym wątkiem jest to, że empiryczne badania nad poznaniem matematycznym rzucają nowe światło na szereg problemów nurtujących w zasadzie wszystkie nauki społeczne. Kluczowy z nich wiąże się z pytaniem „natura czy kultura". Z jednej strony podstawy poznania matematycznego mają charakter pozajęzykowy i związane są bezpośrednio ze zdolnościami wielu zwierząt w zakresie przetwarzania liczebności i umiejętnościami przestrzennymi, przez co wielu badaczy nie waha się uznawać ich za wrodzone (zob. Butterworth, 2022;

Haman & Gut, 2016). Z drugiej strony wrodzona forma poznania matematycznego, tj. wiedza rdzenna, jest bardzo ograniczona, by wspomnieć tylko o wąskim zakresie subitacji. Przekroczenie ograniczeń wiedzy rdzennej jest możliwe dzięki specyficznie ludzkiemu wytworowi kulturowemu, czyli językowi, o czym świadczy choćby to, że użytkownicy języków, charakteryzujących się wąskimi systemami liczebników – należy do nich choćby lud Munduruku – wykonują mniej precyzyjne obliczenia poza zakresem subitacji (zob. Brożek & Hohol, 2017; Butterworth, 2022). Klasyczne pytanie „natura czy kultura" zdaje się więc o tyle źle postawione, że bez wrodzonych systemów rdzennych zapewne w ogóle nie byłoby praktyk matematycznych przyswajanych przez nas w toku edukacji. Praktyki te zanurzone są jednak głęboko w kulturze, której wytwory działają jako „narzędzia poznawcze", modyfikujące istotnie wiedzę rdzenną.

Z badaniami nad poznaniem matematycznym wiąże się również szereg ważkich implikacji praktycznych w zakresie edukacji. Specjaliści z obszaru poznania matematycznego rekomendują przede wszystkim, by matematyczne abstrakcje wprowadzane były w szkole poprzez gruntowanie ich w doświadczeniu przestrzennym, które wspólne jest wszystkim ludziom ze względu na strukturę naszych ciał. Szczególnie ważne jest w tym zakresie wspieranie tworzenia asocjacji przestrzenno-numerycznych. Teza, zgodnie z którą „im więcej przestrzeni, tym lepsza matematyka", nie jest jednak uniwersalnie prawdziwa. O ile w przypadku dzieci silniejsze asocjacje przestrzenno-numeryczne (wyrażane np. przez umówiony wyżej silniejszy efekt SNARC) zazwyczaj wiążą się lepszymi kompetencjami w zakresie szkolnej matematyki, o tyle relacja ta może być nawet odwrotna w wieku dorosłym. Jest to szczególnie wyraźne w przypadku profesjonalnych matematyków, którzy w ogóle nie przejawiają efektu SNARC, co świadczyć może o tym, że długotrwały trening prowadzi do budowania bardziej abstrakcyjnych, czy też mniej ucieleśnionych, reprezentacji liczb (Cipora et al., 2016).

Co więcej, badania nad „zmysłem numerycznym" są cenne dla zrozumienia natury dyskalkulii rozwojowej, która utrudnia, a w skrajnych przypadkach nawet uniemożliwia przyswojenie szkolnej wiedzy matematycznej, stanowiąc barierę dla wkroczenia na liczne ścieżki zawodowe. Jak wskazują cyklicznie publikowane raporty edukacyjne, trudności związane z uczeniem się matematyki mają daleko idące konsekwencje dla dobrobytu całych społeczeństw (zob. Butterworth, 2022, s. 30–33). Wobec tego rekomenduje się podjęcie interwencji psychologicznych, mających pomóc jak najmłodszym osobom z diagnozą dyskalkulii lub zagrożonych dyskalkulią, tak by stymulować możliwie najpełniejszy rozwój zmysłu numerycznego, co stanowi warunek konieczny dla przyswajania szkolnej wiedzy matematycznej (zob. Dehaene, 2011; Butterworth, 2022).

Wreszcie, badania z zakresu poznania matematycznego pokazują, że przetwarzanie wiedzy matematycznej, uważanej za najbardziej abstrakcyjny przedmiot ludzkiego poznania, ma u swych podstaw mechanizmy, które każda osoba – niezależnie od ścieżki edukacyjnej i zawodowej – wykorzystuje w codziennym życiu.

Bibliografia

Brożek, B., & Hohol, M. (2017). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press.

Butterworth, B. (2022). *Can fish count? What animals reveal about our uniquely mathematical mind*. London: Quercus.

Cipora, K., Hohol, M., Nuerk, H.-C., Willmes, K., Brożek, B., Kucharzyk, B., & Nęcka, E. (2016). Professional mathematicians differ from controls in their spatial-numerical associations. *Psychological Research*, *80*(4), 710–726. DOI: 10.1007/s00426-015-0677-6.

Cipora, K., & Nęcka, E. (2012). Kontinua a przestrzeń – przegląd badań nad przestrzennym komponentem poznawczej reprezentacji wielkości i nasilenia. *Psychologia – Etologia – Genetyka*, *26*, 7–21.

Dehaene, S. (2011). *The number sense*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S., & Brannon, E.M. (2010). Space, time, and number: A Kantian research program. *Trends in Cognitive Sciences*, *14*(12), 517–519. DOI: 10.1016/j.tics.2010.09.009.

Haman, M., & Gut, A. (2016). Wiedza wrodzona. W: J. Bremer (Red.), *Przewodnik po kognitywistyce* (s. 681–712). Kraków: Wydawnictwo WAM.

Hohol, M. (2020). *Foundations of geometric cognition*. London: Routledge.

Murawski, R. (2013). *Filozofia matematyki: Zarys dziejów*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza.

Nieder, A. (2019). *A brain for numbers: The biology of the number instinct*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Núñez, R., & Lakoff, G. (2005). The Cognitive Foundations of Mathematics: The Role of Conceptual Metaphor. W: J.I.D. Campbell (Red.), *Handbook of Mathematical Cognition* (s. 109–124). Psychology Press. DOI: 10.4324/9780203998045.109.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. New York: W.W. Norton & Company.

Semadeni, Z. (2023). *Różne oblicza matematyki*. Toruń: Wydawnictwo Naukowe UMK.

Spelke, E.S. (2022). *What babies know: Core knowledge and composition. Volume 1*. Oxford University Press. DOI: 10.1093/oso/9780190618247.001.0001.

Szczygieł, M. (2017). Konstruktywizm Jeana Piageta i koncepcja zmysłu liczby a edukacja matematyczna. *Edukacja*, *140*(1), 7–26. DOI: 10.24131/3724.170101.

Szczygieł, M., Cipora, K., & Hohol, M. (2015). Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych. *Psychologia rozwojowa*, *20*(2), 23–33. DOI: 10.4467/20843879PR.15.014.3803.